MATHENACHHILFE ONLINE

Brainwave · Kursskript mit Mathe-Vokabelteil

Textaufgaben verstehen

Dein Diagnose-Kompass

Erst den Ansatz finden. Dann sicher rechnen.

BASIS · KLASSE 6–10

Prozente, Zuordnungen, Gleichungen und erste Funktionsmodelle.

EXTRA · OBERSTUFE

Bestand und Rate, Integrale sowie ausgewählte Ideen zu Zufall und Bewegung.

Mathe mit Marcel

www.mathenachhilfe-online.com

Mit Schaubildern, zehn Trainingsfällen, Lösungen und Vokabelteil zum Weiterführen.

START

So nutzt du dieses Heft

Du musst nicht alles auf einmal können.

Dieses Heft ist das Skript und die Ausarbeitung zu meinem Kurs **Brainwave**. Ich stelle es dir kostenfrei zur Verfügung, auch ohne Kursteilnahme.

Eine Textaufgabe kann ungewohnt aussehen, obwohl du die passende Mathematik schon kennst. Hier übst du die Brücke zwischen Situation und Rechnung: **Was ist gesucht, und warum passt dein Ansatz?**

Dein Lernziel

Du kannst Angaben und das Gesuchte in eigenen Worten deuten, deinen Ansatz begründen und dein Ergebnis im Zusammenhang prüfen.

Zwei Lernwege in einem Heft

Basis · Klasse 6–10
Beginne mit „Für alle“ auf den Seiten 4–22. Nutze den Selbsttest auf Seite 29. Wähle danach die Beispiele und Fälle 1 bis 6 auf den Seiten 23–34, die zu deinem Unterricht passen. Für quadratische Modelle brauchst du quadratische Funktionen. Vergleiche mit den Lösungen auf den Seiten 51–54 und gehe dann zur Strategie und Selbstreflexion auf den Seiten 59–64. **Den Oberstufenteil darfst du überspringen.**

Extra · Oberstufe, wenn du die Grundlagen kennst
Bestand, Rate und Integral findest du auf den Seiten 35–40; dazu gehören die Fälle 7 und 8 (Seiten 45–46). Voraussetzung sind Funktionen und Ableitungen, beim Integral auch Grundkenntnisse der Integralrechnung. Die Wahlthemen auf den Seiten 41–44 setzen Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswert bzw. Vektoren und Skalarprodukt voraus; dazu gehören die Fälle 9 und 10 (Seiten 47–48).

Zum Wiederfinden: Lösungen Oberstufe: Seiten 55–58 · Vokabelteil: Seiten 65–72 · Checkliste und Website: Seiten 73–74.

Die Klassenangaben sind eine Orientierung. Wählt passende Themen statt möglichst vieler Seiten; unbekannte Inhalte können warten.

So wird aus Lesen echtes Training

1. Lies die Grundidee und das Lernbeispiel. Erkläre die Bedeutung und warum der Ansatz passt.
2. Decke Lösungen und Hinweise ab. Setze selbst neu an, statt nur die bekannte Rechnung abzurufen.
3. Notiere gedeutete Angaben, begründeten Ansatz, Rechnung und Antwortsatz.
4. Vergleiche und erkläre Abweichungen. Prüfe dein Verständnis an einer veränderten Frage.

Wichtig

Dieses Heft ist ein Methoden-Training mit ausgewählten Themen, kein vollständiger Lehrplan- oder Abiturkurs. Es ersetzt weder Rechenübungen noch die Vorgaben deiner Lehrkraft zu Operatoren, Rechenwegen und erlaubten Hilfsmitteln.

FÜR ALLE

Das Handwerker-Dilemma

Du kennst das Werkzeug. Aber passt es zu diesem Problem?

Stell dir vor, du hast den **Keilriemenwechsel** oft geübt und beherrschst jeden Handgriff. Nun macht ein Auto ein ungewohntes Geräusch. Wenn du die Hinweise nicht einordnen kannst, weißt du noch nicht, ob ein Keilriemenwechsel überhaupt die passende Maßnahme wäre.

So kann es auch in Mathematik sein: Du kannst eine Gleichung lösen oder Werte in eine Formel einsetzen. Trotzdem fehlt bei einer neuen Textaufgabe der Ansatz. Das Rechenverfahren zu beherrschen beantwortet noch nicht die Frage, *wann und warum* es passt.

Vom Hinweis zur begründeten Handlung

1 **Hinweise verstehen**
Werkstattbild: Geräusche einordnen.

Mathematik: Wörter, Größen und Einheiten verstehen.

↓

2 **Problem bestimmen**
Werkstattbild: Eine Ursache prüfen.

Mathematik: Das Gesuchte klären und den Ansatz begründen.

↓

3 **Werkzeug einsetzen**
Werkstattbild: Gezielt handeln.

Mathematik: Das passende Verfahren ausführen und prüfen.

Stichwörter geben Hinweise, keine fertige Diagnose

Ein Geräusch allein legt nicht automatisch die Reparatur fest. Genauso bedeutet ein Wort in einer Textaufgabe nicht immer dieselbe Rechnung. Du liest den **ganzen Zusammenhang**: Was beschreibt die Aufgabe? Welche Größe ist gesucht? Warum passt mein Ansatz zu genau dieser Frage?

Zwei Fähigkeiten gehören zusammen

Rechnen können: Ich führe mein gewähltes Verfahren sicher aus.

Den Ansatz finden: Ich erkläre, warum dieses Verfahren die gesuchte Größe liefert.

Rechenübungen bleiben wichtig. Ergänze sie um Fragen nach der Bedeutung, um den Vergleich ähnlicher Aufgaben und um begründete Entscheidungen.

Dabei hilft dir dein Vokabelheft

Es sammelt die Bedeutungen von Fachbegriffen und Formulierungen, wie eine Verständnishilfe für die „Geräusche“ einer Aufgabe. Zu einem Ausdruck notierst du kurz seine Bedeutung im Zusammenhang. **Nicht: Wort sehen und blind losrechnen. Sondern: Bedeutung verstehen und den Ansatz begründen.**

Der Werkstattvergleich erklärt eine Lernidee. Er liefert keine Diagnose für ein tatsächliches Autogeräusch.

FÜR ALLE

Üben heißt neu nachdenken

Ein vertrauter Rechenweg ist noch kein verstandener Zusammenhang.

Ein Verfahren oft zu üben ist sinnvoll: Du wirst sicherer im Rechnen und musst nicht jeden Handgriff neu erfinden. Auch Erinnern gehört zum Lernen. Entscheidend ist aber, **woran du dich erinnerst und was du selbst erklären kannst**.

Zwei Abkürzungen, die Verständnis vortäuschen können

Die Lösung liegt offen. Du blickst auf den nächsten Schritt und schreibst ihn ab. Weil die Rechnung verständlich aussieht, fühlt es sich an, als könntest du sie selbst. Ob du den Ansatz ohne Vorlage gefunden hättest, weißt du damit noch nicht.

Die Lösung steckt schon im Kopf. Du kennst die Aufgabe so gut, dass du die alte Rechnung aus dem Gedächtnis hinschreibst. Auch mit verdeckter Lösung kannst du dabei die neue Frage überlesen. Das prüft dann vor allem deine Erinnerung an diesen Fall.

Frage dich deshalb: Habe ich gerade die Aufgabe durchdacht oder nur ihren bekannten Lösungsweg wiedergegeben? Kann ich erklären, was jeder Schritt in dieser Aufgabe bedeutet?

So übst du mit einer Musterlösung

1. **Verstehen:** Lies das Lernbeispiel. Erkläre die Größen und halte bei jedem wichtigen Schritt an: Warum ist er erlaubt? Was erreiche ich damit?
2. **Selbst versuchen:** Decke die gesamte Musterlösung ab, auch kleine Hinweise. Lies die Aufgabe erneut und entwickle deinen eigenen Ansatz. Schreibe dazu, warum er passt.
3. **Gezielt vergleichen:** Wenn du festhängst, notiere die genaue offene Frage. Schau nur die nötige Hilfe nach, decke sie wieder ab und erkläre den folgenden Schritt selbst. Notiere, welche Hilfe du gebraucht hast.
4. **Neu prüfen:** Bearbeite später eine verwandte Aufgabe mit anderer Frage, Darstellung oder Situation. Prüfe wieder die Bedeutung und Voraussetzungen, statt den alten Weg automatisch zu übernehmen.

Merksatz: Abdecken verhindert das direkte Abschreiben. Erst das erneute Begründen zeigt dir, ob du dich mit dem Inhalt beschäftigst. Eine selbstständig erklärte Lösung mit einem Fehler kann dir mehr über deinen Lernstand sagen als eine fehlerfrei abgeschriebene.

Beim Wiederholen: Rechenregeln darfst du abrufen. Den passenden Einsatz musst du an der aktuellen Aufgabe prüfen. Ein bekanntes Ergebnis allein ist noch kein Beleg für Verständnis.

FÜR ALLE

Dein Plan in fünf Schritten

Eine Orientierung, kein Schema zum blinden Abhaken.

1. **Verstehen**
   Was passiert? Was soll ich herausfinden?
2. **Ordnen**
   Was bedeuten Größen, Einheiten und Grenzen hier?
3. **Übersetzen**
   Welcher Zusammenhang beschreibt die Situation?
4. **Rechnen**
   Ich prüfe das Verfahren und löse meinen Ansatz.
5. **Prüfen**
   Passt die Lösung zur Frage und zur Wirklichkeit?

Die Idee vor dem Beispiel

Bleibt der Preis pro Stück gleich, sind Anzahl und Gesamtpreis **proportional**: Der gleiche Faktor verändert beide Größen. Du kannst deshalb erst auf ein Stück zurückrechnen und dann auf die gesuchte Anzahl hochrechnen.

BEISPIEL · DIE FÜNF SCHRITTE ANWENDEN

Beispiel: Vier gleiche Hefte kosten zusammen 10 Euro.

Frage: Wie viel kosten sieben dieser Hefte bei gleichem Stückpreis?
Ordnen: 4 Hefte kosten 10 Euro; gesucht ist der Preis für 7 Hefte bei gleichem Stückpreis.
Ansatz: Erst den Preis pro Heft finden, dann mit sieben multiplizieren.
Rechnung: $10 : 4 = 2{,}50$; danach $7 \cdot 2{,}50 = 17{,}50$.
Check: Mehr Hefte kosten mehr. Sieben Hefte kosten **17,50 Euro**.

Wenn du festhängst

Beginne mit einem Satz: „Gesucht ist …; das bedeutet hier …“. Zeichne dann eine kleine Skizze, lege eine Tabelle an oder probiere einen einfachen Zahlenfall. Du darfst zwischen den Schritten zurückgehen. Ein erster Ansatz muss nicht sofort perfekt sein.

Jetzt du: Nutze die fünf Schritte in Fall 3 auf Seite 32.

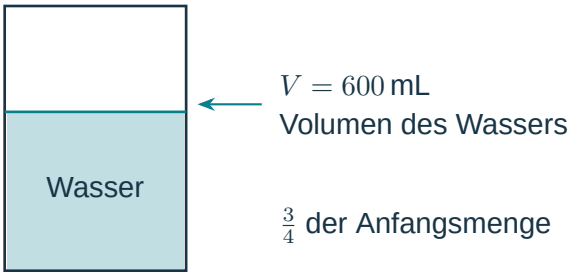
FÜR ALLE

Gib den Zahlen eine Bedeutung

Eine Einheit ist ein Hinweis, kein automatischer Lösungsbefehl.

Die Zahl 12 allein verrät wenig. Zwölf Minuten, zwölf Liter und zwölf Euro stehen für unterschiedliche Größen. Schreibe deshalb zu wichtigen Zahlen und Variablen immer dazu, **was sie bedeuten**. Ein Anteil bezieht sich immer auf ein **Ganzes**. Bei einem Bruch a/b mit natürlichen Zahlen a, b und $b > 0$ teilst du das Ganze in b gleich große Teile und nimmst a davon: Teilmenge $= \frac{a}{b} \cdot$ Gesamtmenge. Kläre zuerst, welche Menge das Ganze ist.

BEISPIEL · WASSER ABFÜLLEN



Frage an den Text	Beispiel für eine sinnvolle Notiz
Was ist gegeben?	Anfangsmenge: 800 mL; drei Viertel davon werden abgefüllt.
Was ist gesucht?	Die abgefüllte Menge in mL.
Wie hängt es zusammen?	Abgefüllte Menge $= \frac{3}{4} \cdot 800\,\text{mL} = 600\,\text{mL}$.
Was ist erlaubt?	Mengen sind hier nicht negativ; der Anteil liegt zwischen 0 und 1.

Variablennamen sind frei wählbar

t bezeichnet häufig eine Zeit und x häufig eine unbekannte Zahl. Das ist aber keine Naturregel. In einer Aufgabe kann x eine Länge in Zentimetern sein, in einer anderen die Zahl verkaufter Tickets. Auch $f(x)$ kann einen Preis, eine Höhe oder eine Temperatur beschreiben.

Einheiten vor dem Rechnen vereinheitlichen

$1{,}5\,\text{h} = 90\,\text{min}$, nicht $150\,\text{min}$.
$250\,\text{mL} = 0{,}25\,\text{L}$, nicht $2{,}5\,\text{L}$.
Bei Flächen und Volumen ändern sich Umrechnungsfaktoren:
$1\,\text{m}^2 = 10\,000\,\text{cm}^2$.

Jetzt du: Benenne in Fall 1 auf Seite 31 das Ganze und die gesuchte Teilmenge.

FÜR ALLE

Gegeben und gesucht mit Bedeutung

Eine Liste von Zeichen erklärt noch keine Aufgabe.

„Gegeben: $f(x) = 12 + 3x$, $x \in [0, 8]$. Gesucht: x.“ So eine Notiz kann Angaben sichern. Als Analyse reicht sie nicht: Du hast die Zeichen kopiert, aber noch nicht geklärt, **was sie beschreiben und warum du sie brauchst**. Eine große Sammlung von Formeln, Zahlen und Intervallen kann genauso unverständlich sein wie der ursprüngliche Text.

Was zu deinen Notizen gehört

Zur Funktion: Welche Größe beschreibt sie? Was bedeutet ihr Wert?

Zur Variablen: Wofür steht sie in genau dieser Aufgabe? Welche Einheit oder Art von Werten passt?

Zu jeder wichtigen Angabe: Was sagt sie über die Situation aus? Ist sie zum Beispiel ein Anfangswert, eine Änderung pro Einheit oder eine Grenze?

Zum Gesuchten: Welche Größe, welcher Zeitpunkt, welcher Bereich oder welche Aussage soll herauskommen? Was würde eine vollständige Antwort sagen?

Du musst nicht jeden Satz abschreiben. **Eine kurze Notiz ist gut, wenn sie Bedeutung enthält.** Unklare Angaben markierst du zunächst; nicht jede Zahl muss in die Rechnung eingehen.

Ein Beispiel richtig ordnen

Ein Tank enthält anfangs 12 Liter. Pro Minute kommen gleichmäßig 3 Liter hinzu. Für die ersten acht Minuten gilt $f(x) = 12 + 3x$, wobei x der Zeitwert in Minuten und $f(x)$ der Volumenwert in Litern ist. Wann sind 27 Liter im Tank?

Gegeben und gedeutet: f beschreibt den Tankinhalt in Abhängigkeit von der vergangenen Zeit. Die 12 steht für 12 Liter zu Beginn; die 3 für den Zufluss von 3 Litern pro Minute. $x \in [0, 8]$ bedeutet: Wir betrachten die Zeit vom Start bis einschließlich Minute 8.

Gesucht und gedeutet: Der Zeitpunkt innerhalb dieser acht Minuten, an dem der Tank 27 Liter enthält. Die 27 ist ein Volumenwert, kein Zeitwert. Deshalb lautet der Ansatz $f(x) = 27$ und nicht $x = 27$.

$$12 + 3x = 27 \quad \Rightarrow \quad x = 5.$$

Nach **5 Minuten** sind 27 Liter im Tank. Die Probe ergibt $12 + 3 \cdot 5 = 27$; außerdem liegt 5 im betrachteten Zeitintervall.

Intervall ist nicht bloß Dekoration: Der Term lässt sich auch für $x = 10$ berechnen. Ob das Tankmodell dann noch gilt, sagt diese Aufgabe nicht. Ein mathematischer Definitionsbereich und der in der Aufgabe untersuchte Bereich müssen nicht gleich sein.

Ohne Sachgeschichte: Bei einer rein mathematischen Aufgabe können x und $f(x)$ einfach reelle Zahlen sein. Dann erklärst du ihre mathematische Rolle, etwa Eingabe und Funktionswert. Erfinde keine Zeit, Höhe oder Einheit dazu.

FÜR ALLE

Erst die Bedeutung, dann die Zahl

Eine Zahl gehört zu einer Größe, nicht einfach in eine Klammer.

Vor dem Einsetzen klären: Was bedeutet jede Variable? Welche Einheit gehört dazu? Was ist gegeben, was gesucht? Bei einer Funktion unterscheidest du die Eingabe von der zugehörigen Ausgabe. Eine vorgegebene Ausgabe verlangt oft eine Gleichung; eine vorgegebene Eingabe setzt du ein.

Unsere Vereinbarung für das Tankmodell

t: vergangene Zeit seit dem Start, gemessen in Minuten.
$V(t)$: Wasservolumen zu dieser Zeit, gemessen in Litern.
Der erlaubte Zeitraum ist $0 \le t \le 20$ min.

BEISPIEL · GLEICHE ZAHL, ANDERE BEDEUTUNG

Zu Beginn sind 10 Liter im Tank. Pro Minute kommen gleichmäßig 2 Liter hinzu; kein Wasser fließt ab. Im angegebenen Zeitraum gilt:

$$V(t) = 10\,\text{L} + \left(2\,\frac{\text{L}}{\text{min}}\right) t.$$

Wann sind 20 Liter im Tank?

Gegeben: Volumen 20 L.
Gesucht: Zeit t in Minuten.

$$V(t) = 20\,\text{L}$$

$$10\,\text{L} + \left(2\,\frac{\text{L}}{\text{min}}\right) t = 20\,\text{L}$$

Daraus folgt $t = 5$ min.
Antwort: Nach 5 Minuten sind 20 Liter im Tank.

Wie viel ist nach 20 Minuten im Tank?

Gegeben: Zeit $20\,\text{min}$.
Gesucht: Volumen $V(20\,\text{min})$.

$$V(20\,\text{min}) = 10\,\text{L} + \left(2\,\frac{\text{L}}{\text{min}}\right) 20\,\text{min}$$

Das ergibt $50\,\text{L}$.
Antwort: Nach 20 Minuten sind 50 Liter im Tank.

> **Warum du die 20 Liter nicht für t einsetzt**
>
> t steht hier für eine Zeit. $V(20\,\text{L})$ wäre deshalb keine zulässige Eingabe. Wenn du für t den Zeitwert 20 verwendest, rechnest du mit *20 Minuten*, nicht mit 20 Litern. Die Einheit zeigt den Unterschied.

Zum Modell gehört eine Grenze: Beide verwendeten Zeiten liegen im erlaubten Zeitraum. In anderen Modellen kann eine Zielmenge mehrmals oder gar nicht erreicht werden. Prüfe deshalb alle Lösungen und den gültigen Bereich.

Nicht auswendig zuordnen: „Wann?“ fragt hier nach der Zeit, aber der Buchstabe muss nicht t heißen. Lies immer die Definitionen in der konkreten Aufgabe.

Zwei Schreibweisen: In manchen späteren Modellen stehen die Variablen für *Zahlenwerte* in festgelegten Einheiten. Dann bedeutet etwa $B(2)$ den Literwert nach 2 Minuten. Hier oben schreiben wir die Einheiten mit. Entscheidend ist jeweils die Legende.

FÜR ALLE

Führe ein Mathe-Vokabelheft

Zwei Spalten: links der Ausdruck, rechts die Bedeutung.

Ein Mathe-Vokabelheft ist eine **Sammlung von Fachbegriffen und Aufgabensprache**. Es ist **keine Formelsammlung**: Du notierst kurz, was ein Ausdruck bedeutet oder welche Größe eine Frage sucht.

So einfach kann dein Heft aussehen

Hier gilt: t ist die Zeit seit dem Start, $V(t)$ das Wasservolumen im Tank. Zeit wird in Minuten, Volumen in Litern angegeben.

Begriff / Formulierung	Bedeutung
Wann sind 20 Liter im Tank?	Gesucht ist die Zeit t. Ansatz: $V(t) = 20\,\text{L}$ nach t lösen.
Wie viel Wasser ist nach 20 Minuten im Tank?	Gesucht ist das Volumen. Dazu $V(20\,\text{min})$ bestimmen.
mindestens 20 Liter	20 Liter oder mehr: $V(t) \geq 20\,\text{L}$.

So lernst du damit

1. Sammle Wörter und Formulierungen, die dir in Aufgaben begegnen.
2. Schreibe rechts eine kurze Erklärung in eigenen Worten. Ein knapper Ansatz kann helfen.
3. Decke die rechte Spalte ab. Erkläre den Eintrag selbst und prüfe ihn an einem eigenen Beispielsatz.

Wichtig: Lies immer den ganzen Satz. Die Aufgabe legt fest, wofür die Buchstaben stehen und welche Einheiten gelten. Stichwörter allein sind keine Rechenbefehle.

Dein Vokabelteil zum Weiterführen

Ab Seite 65 findest du kurze Einträge in zwei Spalten. Die leere Vorlage ab Seite 71 kannst du kopieren oder in deinem Heft weiterführen. Die Sammlung ist bewusst unvollständig.

FÜR ALLE

Textsignale richtig lesen

Ein Wort gibt dir eine Spur. Der Zusammenhang entscheidet.

Lies einen Zusammenhang als ganzen Satz, bevor du ein Rechenzeichen wählst. Notiere, **was gesucht ist**; dasselbe Wort kann je nach Frage zu verschiedenen Rechnungen führen.

Im Text steht …	Deine nächste Frage und ein möglicher Ansatz
„20 Prozent von …“	Welche Größe ist das Ganze? Anteil: $0{,}20 \cdot G$.
„gleich teuer“	Welche beiden Gesamtpreise werden verglichen? $A(x) = B(x)$.
„am Boden“	Wird Höhe *über diesem Boden* gemessen? Dann ist die Zielhöhe 0.
„höchster Wert“	Welche Größe soll maximal sein? In welchem Bereich suchen wir?
„mindestens ein“	Ist „kein einziges“ leichter zu berechnen? Dann das Gegenereignis nutzen.

Warum bloßes Schlüsselwort-Sammeln schiefgeht

Dasselbe Wort, unterschiedliche Rechnung

„Mehr“: Lea hat drei Euro mehr als Tom. Tom hat acht Euro. Lea hat $8 + 3 = 11$ Euro.

„Mehr“: Lea hat elf Euro, also drei Euro mehr als Tom. Tom hat $11 - 3 = 8$ Euro.

Das Wort bleibt gleich. Entscheidend ist, **welche Größe gesucht ist**.

Auch „maximal“ ist kein fertiger Befehl

Der höchste Wasserstand und der schnellste Anstieg des Wasserstands sind verschiedene Fragen. In der Oberstufe vergleichst du dafür unterschiedliche Funktionen: den Bestand und seine Änderungsrate (Seite 37).

Achte auch auf den Arbeitsauftrag

Berechnen: Zeige einen nachvollziehbaren rechnerischen Weg.
Bestimmen/Ermitteln: Finde die gesuchte Größe und mache deinen Weg erkennbar.
Begründen: Erkläre, warum eine Aussage oder ein Ansatz gilt.
Interpretieren: Übersetze ein Ergebnis in die Situation, mit Größe und Einheit.

Die genaue Bedeutung und die erlaubten Hilfsmittel richten sich nach den Vorgaben deiner Schule und Prüfung. Ein einzelnes Operatorwort erlaubt nicht automatisch einen Taschenrechner- oder CAS-Kurzweg.

FÜR ALLE

Ein Verfahren ist auch ein Hinweis

Führe den Auftrag aus und verstehe, warum er hier passt.

Manchmal steht schon in der Aufgabe: „Löse mit dem Einsetzungsverfahren“, „Nutze ein Gegenereignis“ oder „Bestimme die Scheitelpunktform“. Das nimmt dir die freie Wahl des Verfahrens ab. Es nimmt dir aber **nicht die Frage nach seiner Bedeutung** ab.

Prüfe vor dem Start: Was soll das Verfahren hier herausfinden? Woran erkenne ich, dass es anwendbar ist? Welche Voraussetzungen gelten? Welche Angaben aus der Aufgabe nutze ich dafür?

Ein ausdrücklich vorgeschriebener Rechenweg gehört zum Arbeitsauftrag. Ersetze ihn nicht ungefragt durch einen anderen. Ein zweiter Weg kann beim Lernen zur Kontrolle helfen. Falls Vorgabe und Voraussetzungen widersprüchlich wirken, benenne die Stelle und frage nach.

Beispiel Einsetzungsverfahren

Es gilt $y = 2x + 1$ und $x + y = 10$. Gesucht ist ein Zahlenpaar, das **beide** Gleichungen erfüllt. Der Auftrag verlangt das Einsetzungsverfahren.

Warum darfst du y ersetzen? Die erste Gleichung sagt, dass y für jede gemeinsame Lösung denselben Wert wie $2x + 1$ hat. Deshalb kannst du in der zweiten Gleichung genau diesen Ausdruck einsetzen:

$$x + (2x + 1) = 10 \quad \Rightarrow \quad x = 3, \qquad y = 7.$$

Die Probe $7 = 2 \cdot 3 + 1$ und $3 + 7 = 10$ bestätigt beide Bedingungen. „Weil es in der Aufgabe steht“ erklärt den Auftrag, aber noch nicht die mathematische Zulässigkeit.

Beim Ballwurf aus diesem Heft

In Fall 6 wird für die größte Höhe eine Scheitelpunktform verlangt. Sie passt, weil die Höhenfunktion quadratisch ist. In der Form $H - a(t - t_S)^2$ mit $a > 0$ wird vom Wert H etwas Nichtnegatives abgezogen. Das erklärt den größten Höhenwert, **wenn t_S im untersuchten Zeitintervall liegt**. Sonst musst du den betrachteten Bereich beachten und die Randwerte vergleichen.

Beim Münzwurf aus diesem Heft

Fall 9 verlangt ein Gegenereignis. „Mindestens einmal Kopf“ und „keinmal Kopf“ schließen sich aus und decken alle Möglichkeiten ab. Deshalb ergänzen sich ihre Wahrscheinlichkeiten zu 1. Die unabhängigen fairen Würfe erlauben zusätzlich, die Wahrscheinlichkeit für ausschließlich Zahl als Produkt zu berechnen.

Zwei verschiedene Begründungen: Das Gegenereignis darfst du immer zur Ergänzung auf 1 nutzen. Die konkrete Produktrechnung braucht hier die Unabhängigkeit der Würfe. Nur den Namen der Methode zu nennen reicht nicht.

Übertrage das auf deinen Unterricht: Wenn ein Verfahren vorgegeben ist, ergänze vor der Rechnung einen eigenen Satz: „Hier ist es anwendbar, weil …“. Prüfe danach, ob dein Satz wirklich die Aufgabe erklärt oder nur den Verfahrensnamen wiederholt.

BASIS · ANTEILE UND PROZENTE

Anteile und Prozente verstehen

Der wichtigste Schritt ist die Wahl des richtigen Ganzen.

Grundidee · Das Ganze und sein Anteil

Prozent bedeutet „von hundert“: $p\,\% = p/100$. Der Grundwert G ist das Ganze, der Prozentwert W der zugehörige Anteil. Wähle die Formel nach der gesuchten Größe:

Anteil gesucht $W = \frac{p}{100} \cdot G$

Ganzes gesucht $G = W : \frac{p}{100}$ (bei $p > 0$)

Prozentsatz gesucht $p = \frac{W}{G} \cdot 100$ (bei $G > 0$)

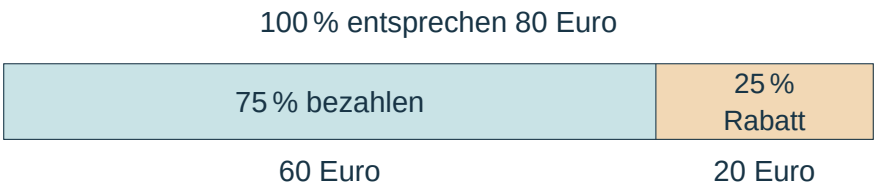
Bei einem Rabatt bleibt der Restanteil $1 - p/100$ des ursprünglichen Preises.

Beispiel · Was kostet die Jacke?

Eine Jacke kostet ursprünglich 80 Euro. Im Angebot gibt es 25 Prozent Rabatt. Wie viel musst du bezahlen?

1 · VERSTEHEN UND ORDNEN

Gesucht ist der **neue Preis**, nicht die Ersparnis. Der ursprüngliche Preis von 80 Euro entspricht 100 Prozent.



2 · ÜBERSETZEN UND RECHNEN

Nach 25 Prozent Rabatt bleiben $100\% - 25\% = 75\%$ des Preises übrig:

$$\text{neuer Preis} = 0{,}75 \cdot 80\,\text{Euro} = 60\,\text{Euro}.$$

Alternativ berechnest du erst den Rabatt: $0{,}25 \cdot 80 = 20$ Euro. Danach ziehst du ihn ab: $80 - 20 = 60$ Euro.

3 · PRÜFEN UND ANTWORTEN

Der neue Preis ist kleiner als 80 Euro. Ein Viertel Rabatt bedeutet, dass drei Viertel bleiben. **Die Jacke kostet im Angebot 60 Euro.**

Jetzt du: Fälle 1 und 2 auf Seite 31; kläre jeweils zuerst das Ganze.

AUFBAU · LINEARE MODELLE

Lineare Modelle aufstellen

„Gleich teuer“ bedeutet: gleiche Gesamtpreise.

Die Grundidee

Bei einem konstanten Preis pro Einheit gilt: **Gesamtpreis = Grundgebühr + Preis pro Einheit** · **Anzahl**. Als Funktion: $P(x) = b + mx$. b ist die Grundgebühr, m der Preis pro Einheit. „Gleich teuer“ heißt $A(x) = B(x)$; „A ist günstiger“ heißt $A(x) < B(x)$. So wird die Frage zu einer Gleichung oder Ungleichung.

BEISPIEL · ZWEI TARIFE VERGLEICHEN

Ein Verleih bietet zwei Tarife an. Tarif A kostet 6 Euro Grundgebühr plus 2 Euro pro Stunde, Tarif B kostet 3 Euro pro Stunde ohne Grundgebühr. Es wird zeitanteilig abgerechnet, höchstens zehn Stunden.

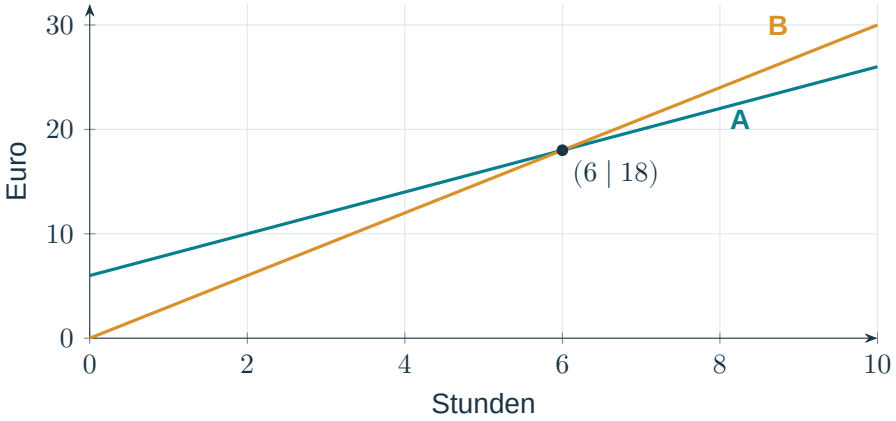
Legende und Modelle

x: Mietdauer in Stunden, $0 \le x \le 10$.
$A(x) = 6 + 2x$ und $B(x) = 3x$: die jeweiligen Gesamtpreise in Euro.

Wann sind beide gleich teuer?

$$\begin{aligned} A(x) &= B(x) \\ 6 + 2x &= 3x \\ 6 &= x \end{aligned}$$

Bei sechs Stunden kosten beide Tarife 18 Euro. Der Schnittpunkt hat also die Koordinaten $(6 \mid 18)$.



Welcher Tarif ist wann günstiger?

Betrachte die Differenz: $A(x) - B(x) = 6 - x$.
Für $x < 6$ ist sie positiv: A ist teurer. Für $x > 6$ ist sie negativ: A ist günstiger. Bei $x = 6$ sind beide gleich teuer.

Prüfe, wie wirklich abgerechnet wird

Bei „je angefangener Stunde“ gelten andere Modelle als bei zeitanteiliger Abrechnung. Bei einem Vertrag zählen außerdem Grundgebühren und der zulässige Zeitraum. Eine schöne Gerade ist nur dann hilfreich, wenn sie zur Situation passt.

Jetzt du: Vergleiche die Fahrradtarife in Fall 4 auf Seite 33.

AUFBAU · QUADRATISCHE MODELLE

Zeitpunkt oder Höhe bestimmen

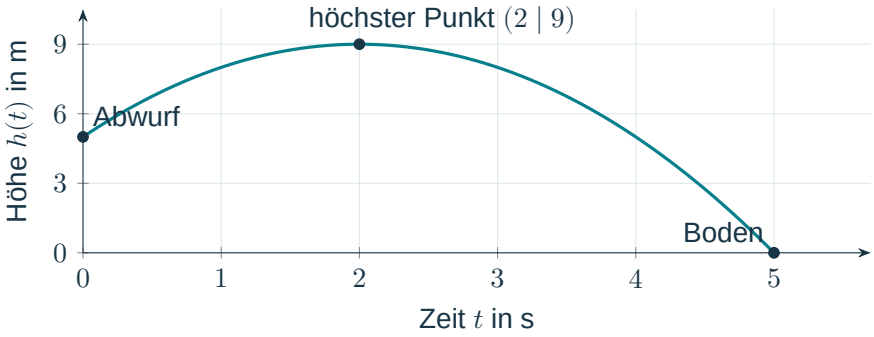
Eine Parabel kann mehrere Fragen beantworten.

Die Grundidee

Ist ein **Zeitpunkt** für eine bestimmte Höhe gesucht, löst du $h(t) =$ Zielhöhe. Für die **größte Höhe** hilft die Scheitelpunktform $h(t) = H - a(t - t_S)^2$ mit $a > 0$: Ein Quadrat ist nie negativ, also ist H der größte Wert bei $t = t_S$. Das gilt im betrachteten Zeitraum nur, wenn t_S darin liegt; sonst prüfst du dessen Randwerte.

BEISPIEL · EIN BALLWURF

Wir betrachten ein vereinfachtes Rechenmodell für die Höhe eines Balls über dem Boden: $h(t) = -t^2 + 4t + 5$. Dabei ist t die Zeit in Sekunden und $h(t)$ die Höhe in Metern. Das Modell gilt vom Abwurf bis zum ersten Bodenkontakt.



Frage A: Wann erreicht der Ball den Boden?

Gesucht ist eine **Zeit**. Da die Höhe über dem Boden gemessen wird, gilt dort $h(t) = 0$:

$$-t^2 + 4t + 5 = -(t-5)(t+1) = 0.$$

Die Gleichung hat die Lösungen $t = 5$ und $t = -1$. Die negative Zeit liegt vor dem Abwurf und gehört nicht zum Modell. Der Ball erreicht nach **5 Sekunden** den Boden.

Frage B: Wie hoch steigt er maximal?

Durch quadratische Ergänzung erhältst du

$$h(t) = 9 - (t-2)^2.$$

Ein Quadrat ist nie negativ. Der größte Wert ist daher 9, erreicht bei $t = 2$. Der Ball steigt auf **9 Meter**; das geschieht nach **2 Sekunden**.

> **Der Graph ist keine Flugbahn im Raum**
>
> Die waagerechte Achse zeigt hier die *Zeit*, keine horizontale Entfernung. Und: Das Modell ist eine vereinfachte Beschreibung. Nach dem Bodenkontakt wird es nicht einfach weiterverwendet.

Jetzt du: Löse die beiden Fragen in Fall 6 auf Seite 34.

SELBSTSTÄNDIG ÜBEN

Erst erklären, dann vergleichen

Die Musterlösung bleibt zunächst außer Sicht.

Nach diesem kurzen Selbsttest folgen zehn Trainingsfälle zum eigenen Bearbeiten. Lege ein Blatt über Hinweise und Lösungen oder blättere nicht vor. Nutze zusätzliches Papier, wenn der Platz nicht reicht. Du musst nicht alle Fälle können: Wähle deinen Lernweg und die passenden Voraussetzungen.

Vor der Rechnung: Beschreibe die Situation und das Gesuchte in eigenen Worten. Erkläre wichtige Angaben, Größen, Variablen und Grenzen. Bei Funktionen: Was geht hinein, was kommt heraus? Begründe anschließend deinen Ansatz.

Nach der Rechnung: Antworte auf die tatsächliche Frage. Prüfe Bedeutung, Einheit und erlaubten Bereich. Vergleiche dann mit der Lösung. Notiere die erste Stelle, an der dein Gedanke abwich, und erkläre den Unterschied. Nur das richtige Endergebnis abzuhaken reicht nicht.

Ein kurzer Selbsttest ohne Rechenschema

Bearbeite diese Fragen, bevor du die Erläuterungen auf Seite 49 liest. Die Tankbeispiele darfst du als Modell kennen; die Begründung formulierst du neu. Hier stehen die Variablen für Zahlenwerte in den angegebenen Einheiten, zum Beispiel Zeitwerte in Minuten.

A · Gleiche Zahl, andere Frage. In einem Tank gilt $V(t) = 10 + 2t$, mit t in Minuten und $V(t)$ in Litern, für $0 \leq t \leq 20$. Vergleiche: „Wie viel ist nach 15 Minuten im Tank?“ und „Wann sind 15 Liter im Tank?“ Erkläre, warum die 15 in den beiden Ansätzen eine andere Rolle hat.

B · Geänderte Darstellung. Ein Tank wird durch eine Tabelle beschrieben. Zum Start enthält er 10 Liter, nach 2 Minuten 14 Liter und nach 4 Minuten 18 Liter. Die Aufgabe sagt ausdrücklich, dass er gleichmäßig gefüllt wird. Wie findest du den Zeitpunkt, zu dem 16 Liter enthalten sind? Welche Angabe rechtfertigt, dass du zwischen den Tabellenwerten rechnen darfst?

C · Geänderte Situation. Ein Taxi kostet 10 Euro Grundpreis und 2 Euro je gefahrenem Kilometer; es wird streckenanteilig abgerechnet. Erkläre, was bei $P(x) = 10 + 2x$ nun anders bedeutet als im Tankmodell. Welche Größe wäre bei „Wie weit kann ich für 16 Euro fahren?“ gesucht?

D · Geänderte Grenze. Für das Tankmodell aus A wird nur die erste Minute untersucht. Jemand löst $V(t) = 15$ und erhält $t = 2{,}5$. Ist das eine Antwort im untersuchten Bereich? Begründe, ohne die richtige Rechnung einfach zu verwerfen.

Wenn du dich an die Lösung erinnerst

Dann benenne trotzdem neu, welche Information den Ansatz trägt. Prüfe eine veränderte Frage oder erkläre, warum ein anderer Ansatz hier nicht passt. Erinnern ist erlaubt; es soll dein Denken unterstützen und nicht ersetzen.

Deine Rückmeldung an dich selbst: „Ohne Hilfe konnte ich … erklären. Bei … brauchte ich einen Hinweis. Als Nächstes prüfe ich … an einem veränderten Fall.“ Eine offen benannte Hilfe macht deinen Lernstand genauer sichtbar.

TRAINING · BASIS

Fälle 1 bis 3

Deute die Angaben und begründe deinen Ansatz.

01 Getränkevorrat · Anteile

In einer Kanne sind $1{,}5$ Liter Saft. Drei Fünftel des Safts werden ausgeschenkt. Wie viel Saft bleibt übrig?

Hilfe bei Bedarf (zunächst abdecken): Berechnest du zuerst den verbrauchten oder direkt den verbleibenden Anteil?

02 Rucksack · Rückwärts denken

Ein Rucksack wird um 20 Prozent reduziert. Dadurch sparst du 12 Euro. Wie hoch war der ursprüngliche Preis, und wie viel kostet er jetzt?

Hilfe bei Bedarf (zunächst abdecken): Die 12 Euro entsprechen wie viel Prozent des ursprünglichen Preises?

03 Rezept · Proportional zuordnen

Für vier gleich große Portionen brauchst du 250 Gramm Mehl. Du möchtest zehn gleich große Portionen zubereiten; das Rezeptverhältnis bleibt gleich. Wie viel Mehl brauchst du?

Hilfe bei Bedarf (zunächst abdecken): Welcher Faktor führt von vier zu zehn Portionen?

Dein Mini-Check

Was bedeuten meine Angaben? Warum passt der Ansatz? Stimmen Ergebnis und Einheit? Welche Hilfe habe ich genutzt?
Lösungen: ab Seite 51

TRAINING · AUFBAU

Fälle 4 bis 6

Erkläre Größen und Grenzen vor der Rechnung.

04 Fahrradtarife · Lineare Funktionen

Zwei Fahrradverleiher rechnen zeitanteilig ab. Für eine Mietdauer h in Stunden kosten sie $A(h) = 4 + 1{,}5h$ Euro und $B(h) = 2{,}5h$ Euro. Es gilt $0 \leq h \leq 8$.
a) Bei welcher Mietdauer sind sie gleich teuer, und wie viel kostet es dann? **b)** Für welche Mietdauern ist A günstiger?

05 Gartenbeet · Eine Gleichung aufstellen

Ein rechteckiges Beet hat einen Umfang von 34 Metern. Die Länge ist 5 Meter größer als die Breite. Bestimme beide Seitenlängen und den Flächeninhalt.
Hilfe bei Bedarf (zunächst abdecken): Welche zwei Seiten kommen beim Umfang jeweils zweimal vor? Zeichne eine Skizze.

06 Ballwurf · Quadratische Funktion

Als vereinfachtes Rechenmodell für eine Ballhöhe gilt im Zeitintervall $0 \le t \le 7$ $h(t) = -t^2 + 6t + 7$. t wird in Sekunden, die Höhe über dem Boden $h(t)$ in Metern angegeben.
a) Wann berührt der Ball den Boden? **b)** Wie hoch steigt er maximal, und wann erreicht er diese Höhe? Nutze eine Scheitelpunktform, keine Ableitungen. Erkläre, warum sie hier den größten Höhenwert zeigt.

Aufgabe 6 setzt quadratische Funktionen voraus. **Lösungen: ab Seite 53**

Dein Zwischenstopp: Vergleiche deine Ansätze mit den Lösungen (Seiten 51–54). Ohne Oberstufenthemen geht es direkt mit der Strategie und Selbstreflexion weiter (Seiten 59–64).
Du kannst rechnen, bist aber unsicher, wann und warum ein Verfahren passt? In einer Probestunde können wir gemeinsam an dieser Stelle ansetzen. **Probestunde anfragen** · Ablauf und Bedingungen auf der Website.

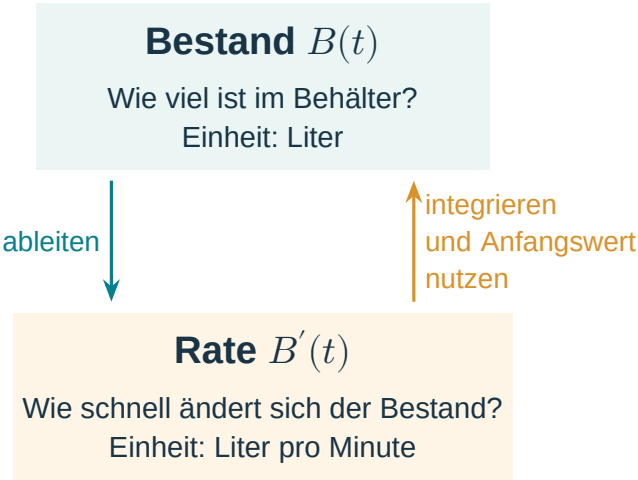
EXTRA · OBERSTUFE

Bestand und Rate auseinanderhalten

„Wie viel ist da?“ ist nicht „Wie schnell ändert es sich?“

Optionaler Oberstufenweg. Du brauchst hier Funktionen und Ableitungen; ab Seite 39 auch Grundkenntnisse der Integralrechnung. Das war noch nicht Thema? Gehe zur Prüfungsstrategie auf Seite 59 weiter.

Bei Aufgaben mit Veränderung hilft ein Vergleich: Ein Wasserbehälter hat einen **Bestand**; die Zu- oder Abnahme pro Minute ist eine **Änderungsrate**.



Vom Begriff zur Rechnung

Die Ableitung $B'(t)$ beschreibt die **momentane** Änderungsrate: Bei $B'(t) > 0$ wächst der Bestand, bei $B'(t) < 0$ sinkt er. Ist eine gegebene Funktion bereits eine Geschwindigkeit oder Zuflussrate, beschreibt sie schon eine Rate; der Buchstabe allein entscheidet das nicht.

BEISPIEL · DEN TANKINHALT DEUTEN

Für $B(t) = 20 + 12t - 2t^2$ gilt $B'(t) = 12 - 4t$. Einsetzen liefert $B(2) = 20 + 24 - 8 = 36$ und $B'(2) = 12 - 8 = 4$:

Aussage	Bedeutung im Tankmodell
$B(2) = 36$	Nach zwei Minuten sind 36 Liter im Tank.
$B'(2) = 4$	Zu diesem Zeitpunkt nimmt der Inhalt mit 4 Litern pro Minute zu.
$B'(4) = -4$	Zu diesem Zeitpunkt nimmt der Inhalt mit 4 Litern pro Minute ab.
$B''(t) = -4$	Die Änderungsrate sinkt pro Minute um 4 Liter pro Minute. Einheit: $\mathrm{L/min^2}$.

Jetzt du: Deute Bestand und Rate in Fall 7 auf Seite 45. Das Tankbeispiel führen wir in den nächsten beiden Abschnitten weiter.

EXTRA · OBERSTUFE

Maximum ist nicht gleich Maximum

Erst klären, welche Größe du optimieren sollst.

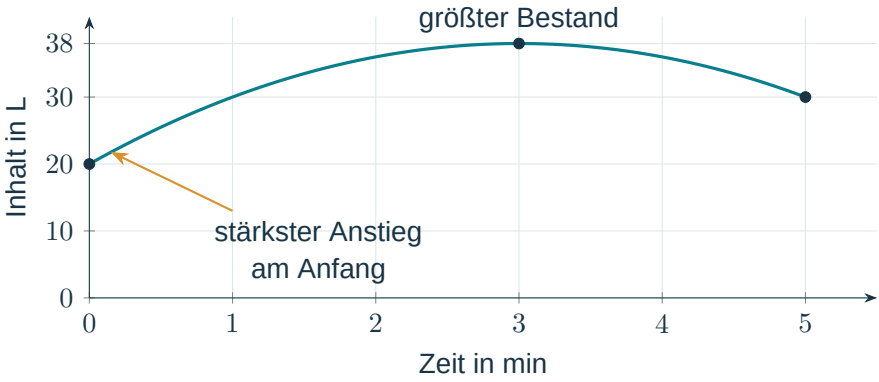
Die Grundidee

Für den **größten Bestand** maximierst du B, für die **stärkste Zunahme** die Rate B'. Wähle erst diese Zielfunktion. Auf einem abgeschlossenen Intervall vergleichst du ihre Werte an allen möglichen Extremstellen und an den Rändern.

Bei differenzierbaren Funktionen liefert das Nullsetzen der Ableitung zunächst **Kandidaten**: für B also $B' = 0$, für B' also $B'' = 0$. Prüfe den Verlauf oder ein geeignetes Kriterium; mögliche nicht differenzierbare Stellen gehören ebenfalls zur Prüfung. Ein Maximum kann auch am Rand liegen.

BEISPIEL · ZWEI FRAGEN AN EINEN TANK

Ein Tank wird für $0 \le t \le 5$ Minuten durch $B(t) = 20 + 12t - 2t^2$ beschrieben. $B(t)$ gibt den Inhalt in Litern an. Daraus folgen $B'(t) = 12 - 4t$ und $B''(t) = -4$.



A · Größter Inhalt

Wir maximieren B, nicht B'.
$B'(t) = 0 \Rightarrow 12 - 4t = 0 \Rightarrow t = 3$. Dort wechselt B' von positiv zu negativ.
Zum Vergleich: $B(0) = 20$, $B(3) = 38$, $B(5) = 30$.
Maximum: 38 Liter nach 3 Minuten.

B · Stärkste Zunahme

Wir maximieren die Rate B'.
$B'(t) = 12 - 4t$ ist im ganzen Intervall fallend. Ihr größter Wert liegt deshalb am linken Rand bei $t = 0$.
Stärkste Zunahme: 12 Liter pro Minute zu Beginn.

Jetzt du: Fall 7a und 7b auf Seite 45. Benenne vor dem Ableiten deine Zielfunktion.

EXTRA · OBERSTUFE

Aus einer Rate wird eine Änderung

Ein Integral ersetzt den Anfangsbestand nicht.

Die Grundidee

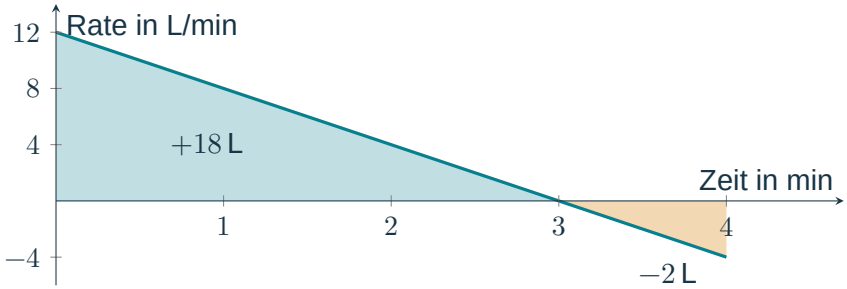
Eine Nettoänderungsrate $r(t)$ beschreibt die Zu- oder Abnahme pro Zeiteinheit. Ihr Integral über einen Zeitraum ergibt die **Änderung**, nicht den Endbestand. Zum Anfangsbestand addierst du deshalb diese Änderung:

$$B(b) = B(a) + \underbrace{\int_a^b r(t)\,\mathrm{d}t}_{\text{Nettoänderung des Bestands}} .$$

Die Einheit passt: $(\text{Liter}/\text{Minute}) \cdot \text{Minute} = \text{Liter}$. Positive Raten vergrößern den Bestand, negative verkleinern ihn. Beim Integral zählen Flächen unterhalb der Zeitachse daher negativ.

BEISPIEL · WIE VIEL WASSER BLEIBT?

Für denselben Tank gilt die Nettoänderungsrate $r(t) = 12 - 4t$ in Litern pro Minute. Anfangs sind $B(0) = 20$ Liter im Tank. Wie viel Wasser enthält er nach vier Minuten?



$$\int_0^4 (12 - 4t)\,\mathrm{d}t = [12t - 2t^2]_0^4 = 48 - 32 = 16.$$

Der Bestand hat **netto um 16 Liter zugenommen**. Mit dem Anfangsbestand ergibt sich $B(4) = 20 + 16 = \mathbf{36\ Liter}$.

Warum die Vorzeichen wichtig sind

Bis Minute 3 nimmt der Bestand um 18 Liter zu, danach bis Minute 4 um 2 Liter ab. Zusammen sind das $18 - 2 = 16$ Liter Nettoänderung. Die geometrischen Flächenbeträge würden dagegen $18 + 2 = 20$ Liter ergeben.

> **Netto ist nicht dasselbe wie gesamter Zufluss**
>
> Aus einer Nettoänderungsrate allein weißt du nicht, ob gleichzeitig Wasser hinein- und herausfließt. Die tatsächlichen Gesamtmengen für Zufluss und Abfluss lassen sich nur mit zusätzlichen Angaben bestimmen.

Jetzt du: Fall 8 auf Seite 46; notiere Anfangsbestand und Nettoänderung getrennt.

WAHLTHEMA · STOCHASTIK

Manchmal ist das Gegenteil leichter

„Mindestens ein“ und „fair“ sauber übersetzen.

Grundidee 1 · Das Gegenereignis nutzen

„Mindestens ein Treffer“ umfasst alle Möglichkeiten außer **keinem Treffer**. Deshalb gilt immer $P(A) = 1 - P(\overline{A})$. Bei unabhängigen Versuchen multiplizierst du die einzelnen Wahrscheinlichkeiten für „kein Treffer“; ohne Unabhängigkeit ist dieses Produkt nicht automatisch zulässig.

BEISPIEL · DREI MÜNZWÜRFE

Eine faire Münze wird dreimal unabhängig geworfen. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit für **mindestens einmal Kopf**. Das Gegenereignis lautet: **keinmal Kopf**, also dreimal Zahl.

KKK	KKZ	KZK	KZZ
ZKK	ZKZ	ZZK	ZZZ

Acht gleich wahrscheinliche Folgen:
sieben mit mindestens einem K.

$$P(\text{mindestens ein Kopf}) = 1 - P(\text{kein Kopf})$$
$$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{7}{8} = 87{,}5\%.$$

Grundidee 2 · Ein faires Spiel erkennen

Der **Erwartungswert** ist die Summe aller möglichen Auszahlungen, jeweils mit ihrer Wahrscheinlichkeit gewichtet. Bei festem Einsatz gilt: erwarteter Nettogewinn = erwartete Auszahlung minus Einsatz. Im fairen Spiel ist dieser Wert null; der Einsatz entspricht also der erwarteten Auszahlung.

BEISPIEL · EIN WÜRFELSPIEL

Bei einem fairen Würfel erhältst du bei einer Sechs 6 Euro ausgezahlt, sonst nichts. Wie hoch darf der Einsatz sein, damit das Spiel im Erwartungswert fair ist?

$$E(\text{Auszahlung}) = \frac{1}{6} \cdot 6 + \frac{5}{6} \cdot 0 = 1\,\text{Euro}.$$

Bei einem Einsatz e ist der **Nettogewinn** die Auszahlung minus Einsatz. Daher gilt $E(\text{Nettogewinn}) = 1 - e$. Für ein faires Spiel setzen wir diesen Wert gleich null: $e = 1$ Euro.

> **Fair bedeutet nicht: Jeder gewinnt gleich oft**
>
> Einzelne Spielrunden können trotz fairem Einsatz Gewinne oder Verluste bringen. Ein Erwartungswert ist keine Garantie für ein konkretes Spielergebnis.

Jetzt du: Wende beide Ideen in Fall 9 auf Seite 47 an.

WAHLTHEMA · VEKTORGEOMETRIE

Kreuzende Wege, getrennte Zeiten

Für eine Kollision muss auch die Zeit übereinstimmen.

Die Grundidee

Ein **Schnittpunkt der Wege** ist ein gemeinsamer Ort; die Objekte dürfen ihn zu verschiedenen Zeiten erreichen. Dafür löst du $\vec{a}(s) = \vec{b}(u)$ mit getrennten Parametern. Eine **Kollision** verlangt denselben Ort zur selben Zeit: $\vec{a}(t) = \vec{b}(t)$ muss in allen Koordinaten mit demselben zulässigen t gelten.

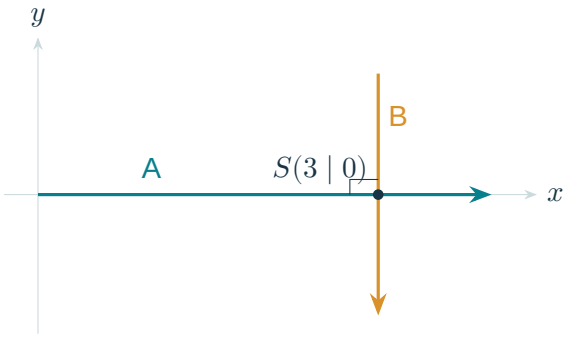
Für zwei Richtungsvektoren ungleich null gilt: Sie stehen genau dann senkrecht, wenn ihr **Skalarprodukt null** ist. Das prüft einen Winkel, nicht eine Kollision.

BEISPIEL · ZWEI BEWEGUNGEN

Zwei punktförmige Objekte bewegen sich in einer Ebene. Für $0 \le t \le 4$ Sekunden gelten die Positionen

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 - t \end{pmatrix}.$$

Die Koordinaten werden in Metern angegeben. A bewegt sich nach rechts, B senkrecht nach unten.



A erreicht S bei $t = 3$.
B erreicht S bei $t = 2$.

1 · Die Wege schneiden sich

Für den geometrischen Schnittpunkt dürfen wir **verschiedene Parameter** verwenden: $(s, 0) = (3, 2 - u)$. Daraus folgen $s = 3$, $u = 2$ und der gemeinsame Ort $(3, 0)$.

2 · Die Objekte kollidieren nicht

Für eine Kollision müsste **zur selben Zeit** $\vec{a}(t) = \vec{b}(t)$ gelten. Die erste Koordinate verlangt $t = 3$, die zweite $t = 2$. Beides kann nicht gleichzeitig gelten. Also gibt es hier keine Kollision.

3 · DIE RICHTUNGEN PRÜFEN: Die Bewegungsrichtungen $(1, 0)$ und $(0, -1)$ sind beide ungleich null. Ihr Skalarprodukt ist $1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) = 0$: Die Richtungen stehen senkrecht aufeinander. Das allein sagt nichts über eine Kollision aus.

Bei Objekten mit räumlicher Ausdehnung wäre zusätzlich ihr Abstand bzw. ihre Größe zu berücksichtigen. Hier sind ausdrücklich punktförmige Objekte gemeint.

Jetzt du: Prüfe Wege, Richtungen und Kollision in Fall 10 auf Seite 48.

TRAINING · OBERSTUFE

Fälle 7 und 8

Erst die Ebene wählen, dann ableiten oder integrieren.

07 Tankinhalt · Bestand versus Rate

Der Inhalt eines Tanks wird für $0 \le t \le 6$ Minuten durch $B(t) = 30 + 8t - t^2$ beschrieben. $B(t)$ wird in Litern angegeben.

a) Wann ist der Inhalt am größten, und wie groß ist er dann? Prüfe auch die Randwerte.
b) Zu welchem Zeitpunkt nimmt der Inhalt am stärksten zu? Gemeint ist die größte *momentane* Änderungsrate. Gib diese Rate an.
c) Berechne $B'(5)$ und interpretiere den Wert.

08 Zu- und Abfluss · Integral

Für einen Behälter gilt während $0 \leq t \leq 5$ Minuten die Nettoänderungsrate $r(t) = 6 - 2t$ in Litern pro Minute. Anfangs enthält er 12 Liter. **Es gibt niemals gleichzeitig Zu- und Abfluss:** Bei $r(t) > 0$ fließt nur Wasser hinein, bei $r(t) < 0$ nur Wasser heraus.

a) Wie viel Wasser enthält der Behälter nach fünf Minuten?
b) Wie viel Wasser ist in dieser Zeit insgesamt hinein- und wie viel herausgeflossen?
c) Warum ist das Integral über das gesamte Intervall nicht die insgesamt hineingeflossene Menge?

Lösungen: ab Seite 55 Eine Rate braucht eine Einheit pro Zeiteinheit.

TRAINING · WAHLTHEMEN

Fälle 9 und 10

Zusätzliche Wege für die Oberstufe.

09 Münzspiel · Wahrscheinlichkeit und Fairness

Eine faire Münze wird viermal unabhängig geworfen.

a) Wie wahrscheinlich ist mindestens einmal Kopf? Nutze ein Gegenereignis und begründe die Ergänzung auf 1.
b) Ein Spiel zahlt 8 Euro aus, wenn bei allen vier Würfen Kopf erscheint. Sonst beträgt die Auszahlung 0 Euro. Welcher feste Einsatz macht das Spiel im Erwartungswert fair?

10 Zwei Bewegungen · Schnitt ist nicht Kollision

Zwei punktförmige Objekte haben im Zeitintervall $0 \le t \le 4$ Sekunden die Positionen

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 - t \end{pmatrix}.$$

Die Koordinaten sind in Metern angegeben.

a) Bestimme den Schnittpunkt der beiden Wege und die jeweilige Zeit, zu der die Objekte dort ankommen.
b) Prüfe mit einem Skalarprodukt, ob die Bewegungsrichtungen senkrecht zueinander sind. Nenne die Voraussetzung für dieses Kriterium.
c) Kommt es im betrachteten Zeitraum zu einer Kollision? Begründe mit der gemeinsamen Zeitvariable.

Lösungen: ab Seite 57 Für eine Kollision müssen Ort *und* Zeit passen.

Dein Oberstufen-Check: Kannst du erklären, warum dein Ansatz passt? Prüfe besonders die gesuchte Größe und die Voraussetzungen. Vergleiche mit den Lösungen auf den Seiten 55–58. Halte deinen nächsten Lernschritt in der Selbstreflexion fest (Seiten 61–64); weitere Anlaufstellen findest du auf Seite 74.

LÖSUNGEN · SELBSTTEST

Die Bedeutung entscheidet

Lies erst nach deinem eigenen Versuch weiter.

A · Eingabe oder Ausgabe

Nach 15 Minuten ist die Zeit vorgegeben: $V(15) = 10 + 2 \cdot 15 = 40$. Gesucht und berechnet ist ein **Volumen von 40 Litern**.

Bei 15 Litern ist dagegen das Zielvolumen vorgegeben: $V(t) = 15$. Aus $10 + 2t = 15$ folgt $t = 2{,}5$. Gesucht und berechnet ist eine **Zeit von 2,5 Minuten**. Beide Zeiten liegen in $[0, 20]$. Die gleiche Zahl gehört also zu verschiedenen Größen; allein ihr Wiedererkennen entscheidet nichts.

B · Von der Tabelle zum Zusammenhang

In zwei Minuten kommen jeweils 4 Liter hinzu, also 2 Liter pro Minute. Von 10 auf 16 Liter fehlen 6 Liter; bei dieser Rate dauert das $6 : 2 = 3$ Minuten. Nach **3 Minuten** sind 16 Liter im Tank.

Die Tabelle allein legt nicht fest, was zwischen den Messpunkten geschieht. Erst die ausdrücklich **gleichmäßige Füllung** rechtfertigt hier die konstante Rate und das Rechnen zwischen den Einträgen.

C · Gleicher Term, andere Größen

x bezeichnet jetzt die gefahrene Strecke in Kilometern und $P(x)$ den Fahrpreis in Euro. Die 10 ist der Grundpreis; die 2 bedeutet 2 Euro pro Kilometer. Für einen Fahrpreis von 16 Euro suchst du die Strecke: $10 + 2x = 16$, also $x = 3$.

Antwort: Unter den genannten Tarifbedingungen kannst du für 16 Euro 3 Kilometer fahren. Eine Tankantwort wie „nach 3 Minuten“ wäre trotz derselben Rechenform falsch. Die Bedeutung und die Einheiten haben sich geändert.

D · Rechnung richtig, Bereich nicht erfüllt

$t = 2{,}5$ löst die Gleichung, liegt aber nicht im jetzt untersuchten Intervall $[0, 1]$. In der ersten Minute enthält der Tank zwischen 10 und 12 Liter; die 15 Liter werden dort nicht erreicht.

Antwort: Innerhalb der ersten Minute gibt es keinen passenden Zeitpunkt. „Die Gleichung hat eine Lösung“ und „die Aufgabe hat eine zulässige Lösung“ sind unterschiedliche Aussagen.

Was du nach dem Vergleichen tun kannst

Decke diese Erläuterungen wieder ab. Erkläre eine der Fragen jemandem, ohne die Rechnung vorzulesen. Wenn du nur das Ergebnis noch weißt, gehe zur Bedeutung der Angaben zurück. Eine ähnliche Aufgabe mit anderen Zahlen kann Rechensicherheit prüfen; eine neue Frage oder Darstellung prüft zusätzlich, ob du deinen Ansatz neu auswählen kannst.

LÖSUNGEN · BASIS

Fälle 1 bis 3 erklärt

Vergleiche auch die Idee hinter deiner Rechnung.

01 · Es bleibt der Restanteil

Ansatz: Wenn $\frac{3}{5}$ verbraucht sind, bleiben $1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$. Der Bruch bezieht sich auf die Anfangsmenge von $1{,}5$ Litern.

$$\frac{2}{5} \cdot 1{,}5\,\text{L} = 0{,}6\,\text{L}.$$

Antwort: Es bleiben **0,6 Liter** Saft.
Check: Verbraucht wurden $0{,}9$ Liter; $0{,}9 + 0{,}6 = 1{,}5$.

02 · Der Rabatt ist nicht der neue Preis

Ansatz: Die Ersparnis von 12 Euro entspricht 20 Prozent des ursprünglichen Preises G.

$$0{,}20G = 12 \quad \Rightarrow \quad G = 12 : 0{,}20 = 60.$$

Der neue Preis ist $60 - 12 = 48$ Euro.
Antwort: Ursprünglich kostete der Rucksack **60 Euro**, jetzt kostet er **48 Euro**.
Check: Ein Fünftel von 60 Euro sind 12 Euro; 80 Prozent von 60 Euro sind 48 Euro.

03 · Gleiche Portionen, gleicher Faktor

Ansatz: Die Mehlmenge wächst proportional zur Portionszahl. Von vier zu zehn Portionen ist der Faktor $10 : 4 = 2{,}5$.

$$250\,\text{g} \cdot 2{,}5 = 625\,\text{g}.$$

Alternativ: Eine Portion benötigt $250 : 4 = 62{,}5$ Gramm; zehn Portionen benötigen $10 \cdot 62{,}5 = 625$ Gramm.
Antwort: Du brauchst **625 Gramm Mehl**.
Check: Für acht Portionen wären es 500 Gramm. Zehn Portionen müssen etwas mehr benötigen.

Was diese drei Fälle verbindet

Kläre immer, worauf sich ein Anteil oder ein Faktor bezieht. „Prozent“, „Bruch“ und „proportional“ sind keine Einladung, beliebige Zahlen miteinander zu multiplizieren.

LÖSUNGEN · AUFBAU

Fälle 4 bis 6 erklärt

Der Definitionsbereich gehört zur Antwort.

04 · Preise gleichsetzen und vergleichen

Bedeutung: h ist die Mietdauer in Stunden, $A(h)$ und $B(h)$ sind Preise in Euro. $[0, 8]$ umfasst den Mietbeginn bis einschließlich acht Stunden. Gleich teuer verlangt gleiche Funktionswerte.
a) $4 + 1{,}5h = 2{,}5h \Rightarrow h = 4$. Beide Preise betragen dann 10 Euro.
b) $A(h) < B(h) \Leftrightarrow 4 + 1{,}5h < 2{,}5h \Leftrightarrow h > 4$.
Antwort: Nach **4 Stunden** sind beide mit **10 Euro** gleich teuer. A ist im gegebenen Bereich für $4 < h \leq 8$ **Stunden** günstiger.
Check: Bei 2 Stunden kostet A 7 Euro und B 5 Euro. Bei 6 Stunden kostet A 13 Euro und B 15 Euro.

05 · Umfang und Fläche nicht verwechseln

Ansatz: Sei x die Breite in Metern, dann ist $x + 5$ die Länge. Der Umfang ist die Summe aller vier Seiten:

$$2x + 2(x + 5) = 34 \;\Rightarrow\; 4x + 10 = 34 \;\Rightarrow\; x = 6.$$

Die Seiten sind 6 Meter und 11 Meter lang. Der Flächeninhalt ist

$$A = 6\,\text{m} \cdot 11\,\text{m} = 66\,\text{m}^2.$$

Check: $6 + 11 + 6 + 11 = 34$ Meter; die Länge ist tatsächlich 5 Meter größer als die Breite.

06 · Zwei Fragen an dieselbe Funktion

a) Boden: $h(t)$ ist die Höhe in Metern, t die Zeit in Sekunden. Gesucht ist vom Abwurf bis einschließlich Sekunde 7 eine Zeit mit Höhe null: $h(t) = 0$. Faktorisieren ergibt

$$-t^2 + 6t + 7 = -(t - 7)(t + 1) = 0.$$

Die Lösungen sind $t = 7$ und $t = -1$. Nur $t = 7$ liegt im gegebenen Intervall. Der Ball erreicht nach **7 Sekunden** den Boden.

b) Maximum: Durch quadratische Ergänzung erhältst du

$$h(t) = 16 - (t - 3)^2.$$

Der Quadratterm ist mindestens null. Daher ist der größte Höhenwert **16 Meter**, erreicht nach **3 Sekunden**.
Check: $h(0) = 7$ Meter und $h(7) = 0$ Meter. Der Scheitel liegt innerhalb des betrachteten Intervalls.

LÖSUNGEN · OBERSTUFE

Fälle 7 und 8 erklärt

Bestand in Litern, Rate in Litern pro Minute.

07 · Zwei unterschiedliche Maxima

Bedeutung: $B(t)$ ist der Inhalt in Litern, $B'(t)$ die Rate in Litern pro Minute. t zählt Minuten; betrachtet wird der Start bis einschließlich Minute 6.

a) $B'(t) = 8 - 2t$. Aus $B'(t) = 0$ folgt $t = 4$. Vor Minute 4 ist $B' > 0$, danach $B' < 0$. Vergleiche außerdem

$$B(0) = 30, \qquad B(4) = 46, \qquad B(6) = 42.$$

Der größte Bestand beträgt **46 Liter nach 4 Minuten**.

b) Die Rate $B'(t) = 8 - 2t$ fällt im ganzen Intervall. Ihr Maximum liegt bei $t = 0$ und beträgt **8 Liter pro Minute**. Die stärkste momentane Zunahme liegt also **zu Beginn**, nicht beim größten Bestand.

c) $B'(5) = 8 - 10 = -2\,\text{L/min}$. Nach fünf Minuten nimmt der Tankinhalt momentan mit **2 Litern pro Minute ab**. Das bedeutet nicht, dass nur 2 Liter im Tank sind.

08 · Anfangswert plus Nettoänderung

a)

$$B(5) = 12 + \int_0^5 (6 - 2t)\,\mathrm{d}t$$
$$= 12 + [6t - t^2]_0^5$$
$$= 12 + 5 = \mathbf{17}\,\text{L}.$$

b) Die Rate ist bei $t = 3$ null. Bis Minute 3 fließt Wasser hinein; danach fließt es heraus. Weil laut Aufgabe kein gleichzeitiger Zu- und Abfluss stattfindet, gilt:

$$\text{Zuflussmenge} = \int_0^3 (6 - 2t)\,\mathrm{d}t = 18 - 9 = \mathbf{9}\,\text{L},$$

$$\text{Abflussmenge} = -\int_3^5 (6 - 2t)\,\mathrm{d}t = -(5 - 9) = \mathbf{4}\,\text{L}.$$

c) Das Integral über $[0, 5]$ zählt den negativen Beitrag des Abflusses mit: Es ergibt die **Nettoänderung von 5 Litern**, nicht die Zuflussmenge von 9 Litern.
Check: $12 + 9 - 4 = 17$ Liter. Der Bestand bleibt nichtnegativ: Er steigt zunächst auf 21 Liter und fällt dann auf 17 Liter.

> **Eine wichtige Voraussetzung**
>
> Ohne die Zusatzangabe „niemals gleichzeitig Zu- und Abfluss“ könnten größere Zu- und Abflussmengen dieselbe Nettoänderung erzeugen. Dann wären die beiden Gesamtmengen nicht eindeutig aus r ablesbar.

LÖSUNGEN · WAHLTHEMEN

Fälle 9 und 10 erklärt

Gleiche Wörter, präzise Bedingungen.

09 · Gegenereignis und Nettogewinn

a) Das Gegenteil von „mindestens einmal Kopf“ ist „viermal Zahl“. Wegen der unabhängigen fairen Würfe gilt

$$\begin{aligned} P(\text{mindestens ein Kopf}) &= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 \\ &= \frac{15}{16} = \mathbf{93{,}75}\,\%. \end{aligned}$$

b) Viermal Kopf hat die Wahrscheinlichkeit $1/16$. Der Erwartungswert der Auszahlung ist

$$\frac{1}{16} \cdot 8 + \frac{15}{16} \cdot 0 = 0{,}50\,\text{Euro}.$$

Für einen festen Einsatz e gilt $E(\text{Nettogewinn}) = 0{,}50 - e$. Fairness verlangt den Wert null. Der faire Einsatz beträgt daher **0,50 Euro**.
Check: Beim Gewinn ist der Nettogewinn $7{,}50$ Euro, sonst $-0{,}50$ Euro. Damit ist $\frac{1}{16} \cdot 7{,}50 + \frac{15}{16} \cdot (-0{,}50) = 0$.

10 · Zwei Ankunftszeiten sind noch kein Treffen

a) Für den Schnitt der Wege verwenden wir verschiedene Parameter:

$$\begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3-u \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad s = 2, \quad u = 3.$$

Der Schnittpunkt ist $S(2 \mid 0)$. A kommt nach **2 Sekunden** dort an, B nach **3 Sekunden**. Beide Zeiten liegen im betrachteten Intervall.

b) Die Richtungsvektoren sind $(1, 0)$ und $(0, -1)$, beide ungleich null. Ihr Skalarprodukt ist $1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) = 0$. Die Bewegungsrichtungen sind **senkrecht**.

c) Für eine Kollision müsste mit derselben Zeit t gelten:

$$(t, 0) = (2, 3 - t).$$

Die erste Koordinate verlangt $t = 2$, die zweite $t = 3$. Es gibt keine gemeinsame Lösung. Die Objekte **kollidieren nicht**.
Check: Bei $t = 2$ ist A in $(2, 0)$, B aber in $(2, 1)$. Bei $t = 3$ ist B in $(2, 0)$, A aber in $(3, 0)$.

PRÜFUNGSSTRATEGIE

Du musst nicht alles sofort lösen

Arbeite zuerst dort, wo du einen klaren Weg siehst.

Du musst in einer Schulaufgabe nicht überall etwas stehen haben. Lieber bearbeitest du weniger Aufgaben konzentriert und korrekt, als überall hastig anzufangen und Fehler zu machen. **Eine leere Stelle ist kein Auftrag zum Raten.**

Dein Satz für den Test

„Ich muss nicht überall sofort etwas haben. Ich beginne mit dem, was ich kann, und gehe dann Schritt für Schritt weiter.“

Deine Ampel: erst Grün, dann Gelb, zuletzt Rot

GRÜN
Ich sehe sofort einen brauchbaren Lösungsweg.

GELB
Mit etwas Nachdenken kann ich weiterkommen.

ROT
Im Moment fehlt mir ein Ansatz. Ich komme später zurück.

Du brauchst dafür keine farbigen Stifte. Kleine Zeichen wie ✓, ∼ und **?** auf deinem Konzeptblatt reichen und funktionieren auch schwarz-weiß. Nutze nur Markierungen, die in deiner Prüfung erlaubt sind; verwechsle sie nicht mit Korrekturfarben der Lehrkraft.

So könnte die Reihenfolge aussehen

Beim Überblick markierst du: **1a** ✓ · **1b** ? · **2** ∼ · **3** ✓.
Du beginnst mit **1a und 3**, gehst dann zu **2** und kehrst anschließend zu **1b** zurück. Eine rote Teilaufgabe macht nicht automatisch die ganze Aufgabe rot. Deine Einschätzung darf sich unterwegs ändern. Wenn eine Teilaufgabe ein vorheriges Ergebnis voraussetzt, beachte diese Abhängigkeit.

Sorgfalt statt Vollschreiben

- Wird aus einer grünen Aufgabe ein Zeitfresser? Notiere deinen Stand, markiere sie neu und gehe weiter.
- Halte **sinnvolle Teilansätze** sauber fest. Sie können je nach Bewertung Punkte bringen; zufällige Rechnungen helfen nicht.
- Plane von Anfang an etwas Zeit zum Prüfen ein. Kontrolliere Vorzeichen, Einheiten, Grenzen und Antwortsätze.

SELBSTREFLEXION · DRUCKVORLAGE

Was gelingt mir schon?

Ein Lernprofil, keine Note und keine Diagnose.

Beziehe dich auf eigene Versuche mit verdeckter Lösung. Kreuze an, was du dabei erklären und ausführen konntest. Notiere nötige Hilfe; bloß erinnerte Ergebnisse reichen nicht. Ohne eigenen Versuch wählst du N.

Name: _____ **Datum:** _____

Bearbeitete Aufgaben: _____

Die vier Antworten

A = gelingt mir allein **H** = gelingt mir mit Hilfe
U = dabei bin ich noch unsicher **N** = noch nicht ausprobiert

Was kann ich an meiner Arbeit erkennen?	A	H	U	N
Verstehen: Ich benenne die gesuchte Größe in eigenen Worten.	☐	☐	☐	☐
Ich deute Angaben, Variablen, Funktionen und Grenzen, statt sie nur abzuschreiben.	☐	☐	☐	☐
Planen: Ich schreibe einen passenden Zusammenhang auf.	☐	☐	☐	☐
Ich begründe meinen Ansatz selbst, auch bei vorgegebenem Verfahren.	☐	☐	☐	☐

Was kann ich an meiner Arbeit erkennen?	A	H	U	N
Rechnen: Ich führe meinen Rechenweg selbst und nachvollziehbar aus.	☐	☐	☐	☐
Ich erkenne und korrigiere Rechen- oder Umformungsfehler.	☐	☐	☐	☐
Prüfen: Ich kontrolliere Einheit, Größenordnung und zulässige Werte.	☐	☐	☐	☐
Mein Antwortsatz beantwortet genau die gestellte Frage.	☐	☐	☐	☐
Prüfungsstrategie: Ich starte mit lösbaren Aufgaben statt überall gleichzeitig.	☐	☐	☐	☐
Ich lasse Festgefahrenes vorläufig los und komme mit Prüfzeit zurück.	☐	☐	☐	☐

Das gelingt mir schon (mit einem konkreten Beispiel):

Hier bin ich hängen geblieben (Aufgabe und Stelle):

Nächster Schritt: Nutze die Auswertung auf Seite 63. Bewahre den Bogen auf und vergleiche ihn später mit einer neuen Einschätzung.

SELBSTREFLEXION · AUSWERTUNG

Deine Einschätzung wird ein Plan

Wähle einen kleinen nächsten Schritt statt fünf Baustellen zugleich.

Keine Punkte addieren. Deine Kreuze sind ein Arbeitsprofil, keine gemessene Begabung und keine Vorhersage deiner nächsten Note. Lies sie bereichsweise:

- **A:** Behalte die Strategie bei und teste sie an einer leicht veränderten Aufgabe.
- **H:** Schau, welche Hilfe nötig war. Übe einen ähnlichen Fall und reduziere genau diese Hilfe.
- **U:** Wähle eine konkrete Stelle zum Üben oder lass dir genau diesen Schritt erklären.
- **N:** Bearbeite erst einen passenden Fall. Danach kannst du dich sinnvoll einschätzen.

Dein Bereich	Ein konkreter nächster Lernschritt
Verstehen	Deute Angaben und Gesuchtes in eigenen Worten. Erkläre Funktionen und Grenzen. Nutze Seite 13 und ergänze unbekannte Begriffe im Vokabelheft.
Planen	Notiere zuerst nur den Ansatz und einen „weil“-Satz. Vergleiche zwei ähnlich klingende Aufgaben mit unterschiedlichen Fragen. Nutze Seite 19.

Dein Bereich	Ein konkreter nächster Lernschritt
Rechnen	Suche den ersten falschen Schritt, nicht nur die letzte falsche Zahl. Übe die nötige Fertigkeit mit verdeckter Lösung. Prüfe danach einen veränderten Fall, nicht nur die Erinnerung an die alte Rechnung.
Prüfen	Ergänze nach jeder Rechnung drei Checks: Einheit? Größenordnung? Frage beantwortet? Nutze die Checkliste auf Seite 73.
Prüfungsstrategie	Sortiere eine kleine gemischte Auswahl mit ✓, ∼, ?. Bearbeite sie in dieser Reihenfolge und reserviere bewusst Prüfzeit. Nutze Seite 59.

Beispiel: „Beim Planen brauche ich oft Hilfe. Beim nächsten Tarifvergleich schreibe ich die beiden Preisfunktionen und begründe das Gleichsetzen, bevor ich in die Lösung schaue.“

Jetzt du · Mein nächster Schritt

Ich wähle diesen Bereich:

Das übe ich an dieser Aufgabe:

Daran erkenne ich, dass es besser klappt:

Dann schaue ich noch einmal hin:

VOKABELHEFT · GRUNDBEGRIFFE

Mein Mathe-Vokabelheft

Links der Begriff. Rechts die kurze Bedeutung.

Lies im Zusammenhang: Die Aufgabe legt fest, wofür Buchstaben stehen und welche Einheiten gelten. Diese Sammlung ist ein Anfang; ergänze eigene Einträge.

Begriff / Formulierung	Bedeutung
Zahl und Zahlenwert	Eine Zahl allein nennt noch keine Größe. Bei $20\,\mathrm{L}$ ist 20 der Zahlenwert zur Einheit Liter.
Größe und Größenwert	Eine Größe ist etwa Länge, Zeitdauer oder Volumen. Ein Größenwert mit Einheit ist zum Beispiel $20\,\mathrm{L}$.
Einheit	Gibt an, worin eine Größe gemessen wird, zum Beispiel Meter, Minuten oder Liter.
Variable	Ein Zeichen für einen veränderlichen oder unbekannten Wert. Seine Bedeutung legt die Aufgabe fest.
Term	Ein mathematischer Rechenausdruck, zum Beispiel $3x + 2$; ohne Gleichheits- oder Ungleichheitszeichen.
Gleichung	Zwei Terme sollen denselben Wert haben. Gesucht sind die erlaubten Werte, die die Gleichung erfüllen.
Funktion	Ordnet jeder erlaubten Eingabe genau eine Ausgabe zu. Verschiedene Eingaben dürfen dieselbe Ausgabe haben.

Begriff / Formulierung	Bedeutung
Argument und Funktionswert	Bei einer Funktion f ist x die Eingabe (das Argument); $f(x)$ ist die zugehörige Ausgabe (der Funktionswert).
Gegeben	Bekannte Angaben mit ihrer Bedeutung: Was beschreiben Größen, Variablen, Funktionen und Grenzen? Nicht nur Zeichen abschreiben.
Gesucht	Die gefragte Größe oder Aussage in eigenen Worten, mit Einheit und relevantem Bereich. Was soll die Antwort aussagen?
Zulässiger Bereich	Die Werte, die im Modell erlaubt sind und zur Situation passen. Anzahlen sind zum Beispiel nicht negativ und ganzzahlig.
Probe und Plausibilität	Probe: Erfüllt das Ergebnis den Ansatz? Plausibilität: Passen Einheit, Größenordnung und Bedeutung?

VOKABELHEFT · AUFGABENSPRACHE

Fragen und kleine Wörter

Der ganze Satz entscheidet, was gemeint ist.

Für die Tank-Einträge gilt: t ist die Zeit seit dem Start in Minuten; $V(t)$ ist das Volumen in Litern. Es werden nur erlaubte Zeiten betrachtet.

Begriff / Formulierung	Bedeutung
Wann?	Bei einem zeitlichen Vorgang: Zeitpunkt(e) gesucht. „Wann sind $20\,\text{L}$ im Tank?“: $V(t) = 20\,\text{L}$ nach t lösen. Sonst kann „wann“ auch „unter welchen Bedingungen“ heißen.
Wie lange?	Bei einer Zeitfrage: Dauer gesucht, nicht ein Zeitpunkt. Dauer = Endzeit minus Anfangszeit.
Wie viel? / Wie viele?	Die genannte Größe oder Anzahl ist gesucht. „Wie viel Wasser nach 20 Minuten?“: $V(20\,\text{min})$ bestimmen.
Wie schnell?	Eine Geschwindigkeit oder Änderungsrate ist gesucht, zum Beispiel Liter pro Minute. Beachte: im Durchschnitt oder zu einem Zeitpunkt?
Genau	Gleich dem genannten Wert: „genau $20\,\text{L}$“ heißt $V(t) = 20\,\text{L}$.
Mindestens	Nicht weniger als; die Grenze zählt mit. „Mindestens $20\,\text{L}$“ heißt $V(t) \geq 20\,\text{L}$.
Höchstens	Nicht mehr als; die Grenze zählt mit: $V(t) \leq 20\,\text{L}$. „Weniger als“ ($<$) und „mehr als“ ($>$) schließen die Grenze aus.

Begriff / Formulierung	Bedeutung
Um eine Menge verändern	Nennt die Änderung. „Steigt um 5 L“: zum bisherigen Volumen 5 L addieren.
Auf einen Wert verändern	Nennt den neuen Wert. „Steigt auf 20 L“: Danach sind 20 L vorhanden; nicht 20 L addieren.
Pro / je	Bezieht eine Größe auf eine andere: 2 L pro Minute ist eine Rate; 3 Euro je Heft ein Stückpreis.

VOKABELHEFT · ZUM NACHSCHLAGEN

Prozente und Funktionen

Den Bezug und die gesuchte Größe unterscheiden.

Prozentangaben

Begriff / Formulierung	Bedeutung
Grundwert	Die Bezugsgröße, die $100\,\%$ entspricht. Frage immer: „Prozent wovon?“
Prozentsatz und Prozentwert	Der Prozentsatz nennt den Anteil, etwa $25\,\%$. Der Prozentwert ist die zugehörige Teilgröße: $25\,\%$ von 80 Euro sind 20 Euro.
Prozentpunkte	Die Differenz zweier Prozentangaben. Von $20\,\%$ auf $30\,\%$: plus 10 Prozentpunkte, relativ zum alten Anteil plus $50\,\%$.

Extra Oberstufe

Begriff / Formulierung	Bedeutung
Nullstelle	Ein erlaubter Eingabewert, bei dem der Funktionswert null ist. Bei einer Funktion f: $f(x) = 0$ nach x lösen.
Änderungsrate und Ableitung	Die Ableitung beschreibt die momentane Änderungsrate, falls sie existiert. Bei Volumen über Zeit zum Beispiel Liter pro Minute, nicht Liter.
Maximum und Minimum	Größter bzw. kleinster Wert im betrachteten Bereich; lokal nur in einer Umgebung. Unterscheide den Wert von der Stelle, an der er erreicht wird.

Meine Ergänzungen

Begriff / Formulierung	Bedeutung

DEIN EIGENES VOKABELHEFT

Meine neuen Einträge

Ein Ausdruck und seine Bedeutung reichen.

Ergänze Wörter und Formulierungen aus deinen Aufgaben. Erkläre sie rechts kurz in eigenen Worten. Diese Vorlage kannst du kopieren oder im Heft weiterführen.

Begriff / Formulierung	Bedeutung

Begriff / Formulierung	Bedeutung

ZUM MITNEHMEN

Dein Kompass für die nächste Aufgabe

Ein guter Ansatz ist eine Entscheidung, die du erklären kannst.

Fünf Fragen für deinen Heftrand

1. **Verstehen:** Was passiert, und was ist genau gesucht?
2. **Ordnen:** Was sagen Größen, Funktionen, Einheiten und Grenzen aus?
3. **Übersetzen:** Welcher Zusammenhang passt, und warum?
4. **Rechnen:** Warum ist das Verfahren anwendbar, und wie führe ich es aus?
5. **Prüfen:** Sind Ergebnis, Einheit und Antwortsatz sinnvoll?

Wenn die Lösung nicht passt

- Habe ich den gesuchten *Zeitpunkt* mit einer *Höhe* verwechselt?
- Bezieht sich der Prozentwert auf das richtige Ganze?
- Habe ich Einheiten vereinheitlicht und Grenzen eingehalten?
- Brauche ich einen Bestand, eine Rate oder eine Nettoänderung?
- Reicht meine Rechnung als Begründung, oder fehlt noch ein Check?

Dein nächster Schritt

Mathe mit Marcel · Mathenachhilfe Online

Website und weitere Lernangebote:
www.mathenachhilfe-online.com

Wenn du deine Ansatzwahl gemeinsam üben möchtest:
Probestunde anfragen · Ablauf und Bedingungen online.

Dieses Skript ist kostenfrei. Den ausführlichen Kurs gibt es auch einzeln im Shop:
mathenachhilfe-online.com/shop

Grundlage und Herkunft

Zum Kurs Brainwave, auf Grundlage der Skripte, Unterrichtskonzepte und Ideen von Marcel Daum. Bei Ausarbeitung und Gestaltung wurde KI unterstützend eingesetzt.

Verwendete Vorlagen: **„Vom Rechner zum Diagnose-Profi“** (12 Folien, besonders 2–9) und **„Vom Operateur zum Modellierungs-Profi“** (13 Folien, besonders 3–11; Datei *Das_Diagnose_Cockpit (1).pdf*).

Das Handwerker-Dilemma, die Bedeutung von Größen und Einheiten sowie die begründete Ansatzwahl verbinden beide Vorlagen. Texte, Beispiele, Trainingsfälle, Lösungen, Vokabeleinträge und Schaubilder wurden für dieses Heft ausgearbeitet; die ursprünglichen Foliengrafiken werden nicht übernommen.

Version 1.5 · A5-Ausgabe · Oktober 2026